

المدة : ساعتان
العلامة : 100
اسم الطالب :

امتحان مقرر بنى جنوبية (4)
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الفصل الأول للعام الدراسي 2013 / 2014

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول (15 علامة) أثبت أن نصف الزمرة S ذات الصفر تكون زمرة ذات صفر إذا وفقط إذا تحقق الشرط : $\forall a \in S - \{0\}, aS = Sa = S$

السؤال الثاني (24 علامة) 1 - أثبت أنه إذا كان φ هومومورفيزما من نصف الزمرة S إلى نصف الزمرة S فإن $\varphi(S)$ تكون نصف زمرة جزئية من S .

ب - أثبت أن معدن التمثيل النظامي لنصف زمرة S أي $\varphi: S^1 \rightarrow \mathcal{F}(S^1)$ حيث $a \rightarrow \lambda_a$ هو تمثيل أمين.

ج - أثبت أن الإسحابين الداخليين λ_a و ρ_a في نصف زمرة S مترابطان.

السؤال الثالث (15 علامة) ليكن e عنصرا جامدا في نصف زمرة S ولتكن H_e مجموعة جزئية من eSe تحوي كل عنصر من eSe يملك نظيرا في eSe بالنسبة إلى e فاثبت أن :

1 - H_e زمرة جزئية من S تحوي e .

ب - H_e تحوي أي زمرة جزئية G من S تتقاطع مع H_e أي أن $G \cap H_e \neq \emptyset \Rightarrow G \subseteq H_e$.

السؤال الرابع (10 علامات) أثبت أن نصف الزمرة الدوارة $\langle a \rangle$ ذات الخليل r والدور m تكون زمرة إذا وفقط إذا كان $r = 1$.

السؤال الخامس (10 علامات) إذا كان α عنصرا ثابتا في الزمرة النصف طوبولوجية G فاثبت أن تطبيق الإسحاب الداخلي اليساري $\lambda_\alpha: G \rightarrow G$ حيث $\lambda_\alpha(x) = \alpha x$ يكون هومومورفيزما.

السؤال السادس (15 علامة) إذا كانت H زمرة جزئية مفتوحة من زمرة طوبولوجية G فاثبت أن H تكون مغلقة أيضا.

السؤال السابع (11 علامة) لتكن $G = \{1, -1, i, -i\}$ حيث i العدد التخيلي، ولنعرف على G

الضرب العادي المألوف فتصبح G زمرة ولنزودها بالطوبولوجيا τ المعرفة بالشكل التالي : $A \in \tau \Leftrightarrow 1 \in A$ أي أن المجموعات المفتوحة في G هي المجموعات الحاوية على العنصر 1 فتصبح G زمرة طوبولوجية

أ - هل التطبيق $g_1: G \times G \rightarrow G$ حيث $g_1(x, y) = xy$ مستمر في النقطة $(-1, i)$ ولماذا ؟

ب - هل التطبيق $g_2: G \rightarrow G$ حيث $g_2(x) = x^{-1}$ مستمر في النقطة i ولماذا ؟ علما أن $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$ ؟

ج - هل G زمرة طوبولوجية ولماذا ؟

د . عصام نسيم

حده في 2014 / 2 / 13

15
10
20
45

السؤال الأول: (15 علامة)

إذا كانت S نصف زمرة و B مجموعة القواسم اليمينية واليسارية لكل عنصر من S فاثبت أن B تكون غير خالية إذا وفقط إذا كانت S مونويد (نصف زمرة واحدة).

السؤال الثاني: (15 علامة)

لتكن A مجموعة غير خالية و $F(A)$ نصف زمرة التحويلات التامة للمجموعة A فاثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\psi \in F(A)$ قاسم يساري للعنصر $\varphi \in F(A)$ هو أن يكون $\psi(A) \supseteq \varphi(A)$.

السؤال الثالث: (30 علامة)

أ - اثبت أن كل نصف زمرة منتهية تكون دورية ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

ب - اثبت أن نصف الزمرة S تكون نصف زمرة صفرية يمينية إذا كان كل تحويل ل S هو انسحاب يميني

السؤال الرابع: (28 علامة)

ليكن a عنصراً ثابتاً من الزمرة النصف طوبولوجية G والمطلوب:

أ - اثبت أن التحويل اليساري الداخلي $\lambda_a: G \rightarrow G$ حيث $\lambda_a(x) = ax$ هو هوميومورفيزم.

ب - إذا كانت F مجموعة مغلقة و P مجموعة مفتوحة فإن aF مغلقة و aP مفتوحة.

السؤال الخامس: (14 علامة)

لتكن \mathbb{R} مجموعة الأعداد الحقيقية ولنعرف عليها عملية الجمع العادية فتصبح $(\mathbb{R}, +)$ زمرة جمعية، لنزودها بالطوبولوجيا τ المعرفة بالشكل التالي

$\tau = \{G \subseteq \mathbb{R}; 1 \in G\} \cup \{\emptyset\}$ أي أن المجموعات المفتوحة هي المجموعات الحاوية للعنصر 1 إضافة للمجموعة الخالية.

أ - هل التطبيق $g_1: G \times G \rightarrow G$ مستمر في النقطة $(2, 3)$ ولماذا؟

ب - هل التطبيق $g_2: G \rightarrow G$ مستمر في النقطة 1 ولماذا؟

ج - هل \mathbb{R} في هذه الحالة زمرة طوبولوجية ولماذا؟

أثبت أن نصف الزمرة S التي تحقق الشرط $\forall a \in S; aS = Sa = S$ تكون زمرة .

(السؤال الثاني) (20 علامة)

- (أ) أثبت أنه إذا كان $\varphi: S \rightarrow S$ هومومورفيزم من نصف الزمرة S في نصف الزمرة S فإن $\varphi(S)$ تكون نصف زمرة جزئية من S .
- (ب) أثبت أنه إذا كانت نصف الزمرة S تملك حيداً يعنيها فإن كل إسحاب يعنيها لنصف الزمرة S هو داخلي .

(السؤال الثالث) (15 علامة)

إذا كان e عنصراً جليداً من نصف زمرة S فاثبت أن :

- (1) $eS = \{a \in S; ea = a\}$
- (2) $Se = \{a \in S; aa = a\}$
- (3) $eSe = \{a \in S; ae = ea = a\}$

(السؤال الرابع) (16 علامة)

أثبت أن نصف الزمرة الدوارة (a) ذات الدليل r وانور m تكون زمرة إذا وفقط إذا كانت $r = 1$.

(السؤال الخامس) (24 علامة)

- (أ) ليكن a عنصراً ثانياً من الزمرة النصف طوبولوجية G . فاثبت أن الإسحاب اليميني $p_a: G \rightarrow G$ حيث $p_a(x) = xa$ (ونلك $\forall x \in G$) هو هومومورفيزم .
- (ب) برهن أن كل زمرة طوبولوجية تملك جملة أساسية تقاطعية (u) لمجاورات العنصر الحيدوي e .

(السؤال السادس) (10 علامات)

لتكن \mathbb{R} مجموعة الأعداد الحقيقية ، ولنعرف عليها عملية الجمع المألوفة فتصبح $(\mathbb{R}, +)$ زمرة جمية .
لنعرف عليها طوبولوجيا بالشكل التالي : $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \in \mathbb{R}$ (أي أن المجموعات المقترحة هي المجموعات الجزئية من \mathbb{R} الحاتية على العدد 0)

- (1) هل التطبيق $g_1: G \times G \rightarrow G$ حيث $g_1(x, y) = x + y$ مستمر في النقطة (1, 2) ولماذا ؟
- (2) هل التطبيق $g_2: G \rightarrow G$ حيث $g_2(x) = -x$ مستمر في النقطة 1 ولماذا ؟

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات
السؤال الأول: (15 علامة)

إمتحان مقرر بنى جبرية (4)
لطلاب السنة رابعة رياضيات (جبر)
الفصل الثاني للعام الدراسي 2016/2015
العلامة: 100

اسم الطالب: رياض
المدة: ساعة ونصف

اثبت أنه إذا كانت S نصف زمرة ذات صفر فإن S تكون زمرة مع الصفر إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$(\forall a \in S - \{0\}; aS = Sa = S)$$

(السؤال الثاني) (15 علامة)

لنكن G_1 و G_2 زمرة ما بحيث أن $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ولنكن $S = G_1 \cup G_2$ ولنعرّف قانون تشكيل داخلي على S كما يلي: لنكن $a, b \in S$ فإذا كانت a, b من زمرة واحدة (من G_1 أو من G_2) فإن نتج ab هو نفسه في زمرةيهما، أما إذا كانت $a \in G_1$ و $b \in G_2$ فإن $ab = ba = b$ ، فاثبت أن S نصف زمرة

(السؤال الثالث) (15 علامة)

ليكن λ و ρ إنسحابين يساري ويميني لنصف زمرة S ولنكن $a \in S$ فاثبت أن $\lambda \cdot \lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$. وإذا كان λ و ρ مترابطين فاثبت أن $\lambda_a \cdot \lambda = \lambda_{\rho(a)}$.
 $\rho \circ \rho_a = \rho_{\rho(a)}$
 $\lambda_a \circ \lambda = \lambda_{\lambda(a)}$

(السؤال الرابع) (15 علامة)

اثبت أن نصف الزمرة الدورية الإختزالية اليسارية S تكون زمرة إذا وفقط إذا ملكت عنصراً جامداً وحيداً.

(السؤال الخامس) (15 علامة)

لنكن $\{U\}$ جملة أساسية من المجاورات المفتوحة للعنصر الحيادي e في الزمرة النصف طوبولوجية G ، فاثبت أن $\{xU\}$ تشكل قاعدة للطوبولوجيا على G .

(السؤال السادس) (15 علامة)

إذا كانت H زمرة جزئية طوبولوجية من الزمرة الطوبولوجية G ، فاثبت أن \bar{H} تكون أيضاً، وأنه إذا كانت H ثلثة فإن \bar{H} تكون أيضاً.

(السؤال السابع) (10 علامات)

لنكن \mathbb{R} مجموعة الأعداد الحقيقية، ولنعرّف عليها عملية الجمع العادية فتصبح $(\mathbb{R}, +)$ زمرة جمعية، ولنزودها بالطوبولوجيا τ المعرفة كما يلي: $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R}; 2 \in G\} \cup \{\emptyset\}$ (أي المجموعات المفتوحة هي المجموعات الجزئية من \mathbb{R} الحاوية للعنصر 2 إضافة للمجموعة الخالية).

- (1) هل التطبيق $g_1: G \times G \rightarrow G$ حيث $g_1(x, y) = x + y$ مستمر في النقطة $(1, 2)$ ولماذا؟
- (2) هل التطبيق $g_2: G \rightarrow G$ حيث $g_2(x) = -x$ مستمر في النقطة 2 ولماذا؟

مع السلام

العلامة: 100
المدة : ساعة ونصف
اسم الطالب :

امتحان مقرر بنى جبرية 4
لطلاب السنة الرابعة رياضيات (جبر)
الفصل الأول للعلم الدراسي 2015/2014

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات
السؤال الأول (10 علامت)

ثبت أن نصف الزمرة S تكون زمرة إذا ملكت عنصرا مثل g يقسم كل من عناصرها ويمينا ويسارا ويقبل بنفس الوقت القسمة يمينا ويسارا على كل عنصر من عناصرها .

السؤال الثاني (20 علامة)

بفرض أن λ و μ إسماطين يساري ويميني لنصف زمرة S ، وليكن kek فالتب أن

$$p \circ p_a = p_a \circ p \text{ و } \lambda_a = \lambda(a) \text{ و } \lambda \lambda_a = \lambda_a \text{ ثم ثبت أنه إذا كان } \lambda \text{ و } \mu \text{ مترابطين لئان :}$$

$$p_a \circ p = p_a \circ p \text{ و } \lambda_a = \lambda(a) \text{ و } \lambda \lambda_a = \lambda_a$$

السؤال الثالث (15 علامة)

لتكن S نصف زمرة و A مجموعة جزئية غير خالية من S ، ثبت أن $A = (A)$ إذا وقط إذا كانت B هي تقطع كل نصف الزمر الجزئية من S الحوية على A .

السؤال الرابع (15 علامة)

ثبت أن كل نصف زمرة متناهية تكون دورية ولكن العكس غير صحيح .

السؤال الخامس (10 علامت)

إذا كانت $\{p\}$ جلة أساسية من المعالجات المفتوحة للعنصر المحايد e في الزمرة الطوبولوجية G ، فالتب أن $\{xax\}$ تشكل لاحدا الطوبولوجيا على G .

السؤال السادس (20 علامة)

بفرض أن (u) لسرة معالجات للعنصر المحايد e في الزمرة الطوبولوجية G ، فالتب أنه من أجل أي مجموعة جزئية من G يكون $\bar{A} = \cap A u$.

السؤال السابع (10 علامت)

لتكن $G = R$ مجموعة الأعداد الصحيحة وهي زمرة بالنسبة لجمعية الجمع المعادي ، ولتوزد G بالطوبولوجيا τ بالشكل التالي : $1 \in A \iff A \in \tau$ (أي أن المجموعات المفتوحة هي المجموعات الجزئية من R الحوية للعنصر 1) والمطلوب :

(1) هل g_1 مستمر في النقطة $(1, 2)$ ولماذا ؟

(2) هل التطبيق g_2 مستمر في النقطة 1 ولماذا ؟ وهل G زمرة طوبولوجية ولماذا ؟

24/

سليم صحيح مقترر بين خبرية (4)
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٥

السؤال الأول: [10]

مها يكن a, b في S فإنه يوجد x, y في S بحيث أن

$$a = x_1 g \quad a = g y_1 \quad g = x_2 b \quad g = b y_2$$

$$a = x_1 g = x_1 x_2 g$$

$$a = g y_1 = b y_2 y_1 \quad (5)$$

والناتج فإن:

$$a = b y_2 y_1 \quad a = x_1 x_2 g \quad a = x_1 g \quad a = g y_1$$

والناتج فإن S زمرة. (5)

السؤال الثاني: [20]

مها يكن $x \in S$ فإن: $\lambda \lambda_a(x) = \lambda(ax) = \lambda(a) \cdot x = \lambda_{\lambda(a)}(x) \Rightarrow \lambda \lambda_a = \lambda_{\lambda(a)} \quad (5)$

$$p p_a(x) = p(xa) = x p(a) = p_{p(a)}(x) \Rightarrow p p_a = p_{p(a)} \quad (5)$$

لتفرض الآن أن λ دمر متساويان ينتج أنه مها يكن x في S فإن:

$$\lambda_a \lambda(x) = \lambda_a(\lambda(x)) = a \cdot \lambda(x) = p(a) \cdot x = \lambda_{p(a)}(x) \Rightarrow \lambda_a \lambda = \lambda_{p(a)} \quad (5)$$

$$p_a p(x) = p_a(p(x)) = p(x) \cdot a = x \lambda(a) = p_{\lambda(a)}(x) \Rightarrow p_a p = p_{\lambda(a)} \quad (5)$$

السؤال الثالث: [15]

- لتفرض أن B هي تقاطع كل انضمام الزمر الجزئية من S الحادية من A إن $A \leq B$
و B هي نصف زمرة $\Leftarrow B$ تحتوي كل البراءات السكينة لقاع A فإن $\langle A \rangle \leq B$
من ناحية أخرى $A \leq \langle A \rangle$ بالنسبة B فإن $B \leq \langle A \rangle$ ومنه

$$B = \langle A \rangle$$

- بتفرض أن $B = \langle A \rangle$ ، إن كل x في B تكون A تكون حادية $\langle A \rangle$
والناتج B هي تقاطع كل انضمام الزمر الجزئية من S الحادية من A
إن $A \leq B$ هي تقاطع كل انضمام الزمر الجزئية من S الحادية من A (7)

لكن S نصف زمرة منتهية فيها تكن a من S بيان $\langle a \rangle$ منتهية لأن
 مجموعة a نصف زمرة منتهية وبالتالي بيان S دورية. (7)
 من أجل إثبات أن العكس غير صحيح يكفي أن نطلي مثالاً على ذلك.
 لكن $S = P(W)$ مع عملية التقاطع، إن S هي نصف زمرة دورية لأنه
 $\forall A \in P(W)$ فإن A هو عنصر جامد وبالتالي $\langle A \rangle = \{A\}$ وذلك $\forall A \in P(W)$
 وبالتالي بيان $P(W)$ دورية مع أن $P(W)$ غير منتهية. (8)

السؤال الخامس: [10]

لكن $a \in G$ ولكن W مجاورة مفتوحة للعنصر a ، بيان $x \rightarrow x^a: x \rightarrow x^a$ هو مورفزم
 (من مجموعة) بيان $W^a = W$ لأن $W^a(w) = w^a$ تكون مجموعة مفتوحة مجاورة للعنصر a (5)
 مجاورة W ومنه يوجد عنصر $u \in W$ بحيث يكون $u \in W^a \Leftrightarrow u \in W$
 $\Leftrightarrow x u x^{-1} \in W \Leftrightarrow \forall x \in G$ مما يثبت أن W مجموعة طبيعية على G . (5)

السؤال السادس: [20]

لكن $x \in \bar{A}$ ، من أجل أي $u \in W$ فإن xu تكون مجاورة للعنصر x ومنه (5)
 $xu \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow xu \in A \Leftrightarrow x \in xu^{-1}A \Leftrightarrow x \in A$ (نمبر 5) $\Leftrightarrow x \in A$ (نمبر 5) $\Leftrightarrow x \in A$
 $\Leftrightarrow x \in A \cap W \Leftrightarrow x \in A \cap W$ (نمبر 5) $\Leftrightarrow x \in A \cap W$
 ان $\bar{A} \subseteq A \cap W$ إذا كانت $x \in A \cap W \Leftrightarrow x \in A$ وذلك من أجل أي $u \in W$ ، عندها من أجل
 أي مجاورة مفتوحة P للعنصر x فإن P^x تكون مجاورة مفتوحة للعنصر x (5)
 ومنه $x \in AP^x$ لأن $x \in W$ وهذا يعني أنه يوجد $a \in A$ و $p \in P$ بحيث يكون
 $x = ap$ $\Leftrightarrow a = xp^{-1} \in A$ $\Leftrightarrow x \in A$ (نمبر 5) $\Leftrightarrow x \in A$ $\Leftrightarrow x \in A$



السؤال السابع: [15]

١- ان $(1, 2) = 3$ لأن $(1, 2)$ مجاورة للعنصر 3، وإن $(1, 2)$ مجاورة
 للعنصر 1 هي $\{1\}$ وأما مجاورة للعنصر 2 هي $\{1, 2\}$ وإن
 $\{1, 2, 3\} \neq \{1, 2\} + \{1, 2\}$ أي أن g هي مستمرة بالقطعة (1, 2) (5)
 ٢- ان $-1 = g(1)$ وإن $(1, 2)$ مجاورة للعنصر 1- هي $\{1, 2\}$ وأما مجاورة
 للعنصر 1 هي $\{1\}$ $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\} + \{1, 2\}$ أي أن g مستمرة بالقطعة 1 (5)
 نستنتج أن g ليست زمرة طوبولوجية لأن g غير مستمرة

د. محمد صالح

مع العلم

اسم الطالب:
العلامة: 100
المدة: ساعتان

امتحان مقرر بنى جبرية (4)
ليطلاب السنة الابعة رياضيات - جبر
الدورة الثالثة للعام الدراسي 2012/ 2013

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (10 علامات) : لنكن S نصف زمرة تملك عنصرا g يقسم كل من عناصرها يمينا ويسرا ويقبل القسمة يمينا ويسرا على كل عنصر من عناصرها ، فثبت ان S زمرة.

السؤال الثاني: (15 علامة) : لنكن A مجموعة غير خالية و $\mathcal{F}(A)$ نصف زمرة التحويلات التامة للمجموعة A ، فثبت ان الشرط اللازم والكافي ليكون $\psi \in \mathcal{F}(A)$ قسما يساري للعنصر $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ هو ان يكون $\psi(A) \subseteq \varphi(A)$.

السؤال الثالث: (15 علامة) : لنكن S نصف زمرة ولنكن $\langle e \rangle$ نصف زمرة جزئية دورية متتهية منها نلليها r ودورها m ، فثبت ان المجموعة $K_e = \{e^r, e^{r+1}, \dots, e^{r+m-1}\}$ زمرة جزئية من $\langle e \rangle$ مرتبتها m .

السؤال الرابع: (15 علامة) : لنكن S نصف زمرة دورية إختزالية يسارية ، فثبت ان S تكون زمرة إذا وفقط إذا ملكت عنصرا جامدا وحيدا .

السؤال الخامس: (15 علامة) : ليكن e عنصرا ثلثيا من الزمرة النصف طوبولوجية G ، فثبت ان التطبيق $p_e: G \rightarrow G$ حيث $p_e(x) = xe$ هوميومورفيزما ، ثم بين أنه إذا كانت P مجموعة مفتوحة في G فإن كل من p_e و p_A مفتوحة في G حيث $(A \subseteq G)$.

السؤال السادس: (15 علامة) : لنكن G زمرة ماو τ على G ، فثبت ان G تكون زمرة طوبولوجية إذا وفقط إذا كان التطبيق $g: G \rightarrow G$ حيث $g(x, y) = xy^{-1}$ مستمرا وذلك $\forall x, y \in G$ طوبولوجيا .

السؤال السابع: (15 علامة) : لنكن R^+ مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر ولنزودها بعملية الضرب العادية تصبح (R^+, \cdot) زمرة ولنعرّف على R^+ طوبولوجيا τ بالشكل التالي: بفرض ان $A = \{1, 2\}$ فإن $U \in \tau \iff A \subseteq U$ (أي ان المجموعات المفتوحة هي المجموعات الحلوية على 1 و 2)

(1) هل τ مستمر ؟ ولماذا ؟

(2) هل τ مستمر ؟ ولماذا ؟

(3) استنتج فيما إذا كانت R^+ زمرة طوبولوجية أم لا ؟

تمس في 19 / 8 / 2013

د. عصام نسيم

سليم تصحيح مقدر بنى هدية (٤)
للمدرسة السنة الرابعة رياضيات - جبر
الدورة الثالثة للعام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٣

سؤال الأول: [10]

هناك a و b من S فإنه يوجد x_1, x_2, y_1, y_2 من S بحيث يكون:

$$a = x_1 g, a = g y_1, g = x_2 b, g = b y_2 \quad (5)$$

$$a = x_1 g = x_1 x_2 b, a = g y_1 = b y_2 y_1$$

في ان $x = x_1 x_2$ من S لانه $a = x b$ و $y = y_2 y_1$ من S لانه $a = b y$ بالنتيجة فان S زمرة (5)

السؤال الثاني: [15]

لتفرض ان ψ يحول φ من A الى B بالتحويل $\varphi \mapsto \psi \circ \varphi$ \Leftrightarrow يوجد تحويل $g \in \mathcal{H}(A)$ بحيث ان: $\psi \circ \varphi = \psi \circ g$ بالنتيجة فان: $\psi(\varphi(A)) = \psi(g(A)) \subseteq \psi(A)$ (5)

لتفرض الآن $\varphi(A) \subseteq \psi(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, \varphi(x) \in \psi(A) \Leftrightarrow \exists u \in A, \varphi(x) = \psi(u)$ \Leftrightarrow يوجد $u \in A$ بحيث يكون $\varphi(x) = \psi(u)$ لتعرف التحويل $h: A \rightarrow A$ حيث $h(x) = u$ (5)

$$\psi(h(x)) = \psi(u) = \varphi(x) \quad \forall x \in A$$

أي ان $\psi \circ h = \varphi$ بالنتيجة فان ψ قابل عكس لـ φ . (5)

سؤال الثالث: [15]

هناك اعداد اعداد طبيعية m, n و k بحيث $m > n$ و $k > n$ فإنه يوجد اعداد طبيعية λ, μ بحيث يكون: $\lambda m + \mu n = k$ بالنتيجة

$$a, a = a = a = a = a \in K_a$$

في ان K_a نصف زمرة K_a كما ان a هو عنصر هياضي في K_a لانه: (8)

(c) $\bar{a}b$

مما يكمل البنية α^u من K_a ، لتعبر عن $\alpha \in K_a$ بحيث يكون $\alpha^u = a^u$

$$a \cdot a = a$$

$$a^{km} \cdot a^u = a^{km+u}$$

السؤال الرابع: 15

لنفرض جبراً $a \geq 1$ فإن:

$$a^{r+m-1} a^{r-1} = a^{r+m} = a^r$$

$$ea = ae = a, \forall a \in S$$

١ - إذا كانت h زمرة ليان h يادها h العنصر الجامد الوحيد فيها لأنه لو كان

(7) $a = e \Leftrightarrow ae = aa \Leftrightarrow a = a^2$ يعجز أكثر من a فإن

السؤال الخامس: 15

واضح ان التطير μ عند تطير متباين ومعام، لكن W مجاورة L النقطة x_0
وبان G زمرة نصف مبدئية فإن g يكون مستمر μ وبالتالي توهم

و بالتالي μ جارة μ للنقطة x بفتح يكون $\mu \subseteq W$ $\mu(u) = u$ وهذا يبقي ان μ مستقر
وبنفس الطريقة نبين ان التطبيق العكسي $x \mapsto x^{-1} : \mu \rightarrow \mu^{-1}$ مستقر
وبالتالي μ جارة μ يكون هوميومورفزمًا. (8)

وبعض المبررات نرى ان التطبيق العكسي
وبالتالي فإن p يكون هومومورفزمًا. (8)

بما أن μ هو موزعاً فإنه صورة المجموعة المفتوحة U مفتوحة أي أن $\mu(P) = P\alpha$ مفتوحة في G كما أن $PA = UPA$ ^٧ PA مفتوحة.

السؤال السادس: [15]

- إذا كانت G زمرة طوبولوجية فإن كل من التطبيقات g, g^{-1} مستمرة، وكذلك W مجاورة للعنصر x وبما أن g مستمرة فإنه توجد مجاورة U للعنصر x مجاورة V للعنصر y بحيث يكون $UV \subseteq W$

V مجاورة للعنصر y و $U \rightarrow y$ مستمرة توجد مجاورة V_1 للعنصر y بحيث يكون $V_1 \subseteq V$ و $UV_1 \subseteq W$ g مستمرة. (5)

- إذا كان التطبيق $g: G \rightarrow G$ حيث $g(x) = x^{-1}$ مستمرة فإن $g^{-1}(x) = x$ مستمرة أيضاً. g مستمرة أي أنه سأل هل أي مجاورة W للعنصر x توجد مجاورة U للعنصر y بحيث يكون $U \subseteq W$ أو $U \subseteq W$

وبالتالي فإن التطبيق $g: G \rightarrow G$ حيث $g(x) = x^{-1}$ يكون مستمراً. (5) بما أن $g(x) = x^{-1}$ مستمراً فإنه سأل هل أي مجاورة W للعنصر x توجد مجاورة U للعنصر x بحيث يكون $U \subseteq W$ و $UV \subseteq W$ وكذلك $UV \subseteq W$ فإنه

سأل هل أي مجاورة W للعنصر x توجد مجاورة U للعنصر x بحيث يكون $U \subseteq W$ وبالتالي g مستمرة زمرة طوبولوجية. (5)

السؤال السابع: [15]

(التطبيق g غير مستمر في النقطة $(1, 2)$ ون $g(1, 2) = 2$ وكذلك $\{1, 2\}$ مجاورة للعنصر 2 في \mathbb{R}^2 فإن أي مجاورة للعنصر 1 في $\{1, 2\}$ والعنصر 2 في $\{1, 2\}$ فإن:

$$g(\{1, 2\} \times \{1, 2\}) = \{1, 2\} \cup \{2, 4\} \neq \{1, 2\}$$

أي أن g غير مستمر في G . (7)

g غير مستمر في النقطة 3 ون $g(3) = \frac{1}{3}$ وكذلك $\{2, \frac{1}{2}\}$ مجاورة

(٢٠١٢ - ٢٠١٣) - الدورة الثالثة

٤٤

الصفحة (٤١)

العصر $\frac{1}{3}$ ران أحمد مجاورة للعصر ٣ هي $\{2, 1, 1\}$ وبالناظر

$$\textcircled{7} g_2(\{1, 2, 1\}) = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\} \notin \{2, 1, 1\}$$

أي أن g غير مستقر في G

٣- بما أن كل g_1, g_2 غير مستقر إذن G ليست زمرة فكل مجموعة هي

د. عصام نسيم

٢٠١٣/٨/٢١

~~٤٤~~

سلم صحيح قدر ربي هدية (ع)

لطلاب السنة الرابعة رياضيات - هـ

الدورة الإضافية للعام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٥

السؤال الأول: 15

$$B = \{b \in S : bs = sb = s\}$$

ان البرهان

لنم الشرح: $B \neq \emptyset$ فوجد عنصر $b \in S$ ينتمي الى B بالتالي

$$\forall a \in S \quad ax = a, \quad ya = a \quad (5)$$

لكن $b \in S$ بالتالي يوجد $e, e' \in S$ بحيث يكون $be = b$, $e'b = b$

ومن ثم نجد:

$$\left. \begin{aligned} ae = ye = ya = a &\Rightarrow e \text{ عيادي يميني} \\ ea = e'bx = bx = a &\Rightarrow e \text{ عيادي يساري} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e = e'$$

بالتالي S مونويد

كتابة الشرح: اذا كانت S مونويد فحياديها e ينتمي الى B لان:

$$(5) \quad B \neq \emptyset \quad \text{بالتالي} \quad es = se = s$$

السؤال الثاني: 25

$$p - \text{أي بدرجة } n \quad \lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$$

لكن λ_a, λ_b عنصرين من مجموعة الاستجابات اليسارية للمجموعة S وذلك $\forall x \in S$ نبان:

$$\lambda_a \lambda_b(x) = \lambda_a(\lambda_b(x)) = \lambda_a(bx) = a(bx) = (ab)x = \lambda_{ab}(x)$$

$$\Rightarrow \lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab} \quad (15)$$

المجموعة (15)

$$x \cdot y = x \alpha y \Rightarrow x \cdot y = p_a(x) y \Rightarrow x \cdot y = x \alpha y$$

السؤال الثالث: 20

1- شفضان B هي تقاطع كل أعضاء الزمر الجزئية من S العادية على A.

أن $A \subseteq B$ و B هي تقاطع زمرة $\Rightarrow B$ تحتوي كل المراتب الممكنة

لنا فرض $A \subseteq B$ أن $\langle A \rangle \subseteq B$

من ناحية أخرى $A \subseteq \langle A \rangle$ وبالتالي B هي تقاطع B فإن $B \subseteq \langle A \rangle$

ومن ثم $B = \langle A \rangle$ (10) أن B هي تقاطع زمرة جزئية على

2- نفس هي أن $B = \langle A \rangle$ أن كل زمرة جزئية من S تحتوي A

وكونها عادية لـ $\langle A \rangle$ وبالتالي فهي تحتوي B، ومنه نتج أن B هي

هي أصغر زمرة جزئية من S تحتوي A، أي أن B هي

تقاطع كل أعضاء الزمر الجزئية من S العادية لـ A. (10)

السؤال الرابع: 15

لك $a \in G$ ولك w جملة مفتوحة لـ a بأن $x \rightarrow ax$

أو $x \rightarrow ax$ هو تحويل مرافق على مجموعة w فإن $w = axw$

كون مجموعة مفتوحة عادية للعنصر a أي أن $w = axw$ (8)

ومن ثم $u \in w$ يعني $u \in axw$ يكون $u \in w$

أي $u \in w$ جملة أساسية لمعادلات a ومنه نتج أن $\{u\}$ هي قاعدة

المولوية لـ G (7)

السؤال الخامس: 15

إذا كانت G زمرة قبولية فإن كل من الطبيعي

$$g: G \rightarrow G; g(x) = x \quad \text{و} \quad g: G \times G \rightarrow G; g(x, y) = xy$$

لك w جملة ما ax \Leftrightarrow توجد جملة u لـ x و v التي يكون $uv \in w$ (8)

(١٤) - ١٥ - ١٦ : ١٦
 الصفحة (٢١)
 مجاورة لـ $g: V \rightarrow W$ مستمرة مع تعريف مجاورة V لـ g
 حيث يكون $V, V' \in V$ و $u, v \in W$ $u, v' \in W$ أي أن g
 (٧)

السؤال السادس: (١٥)

١- أن $g_1(1,2) = 1+2=3$ وأن $\{1,3\}$ مجاورة للعنصر 3 كما أن
 العنصر مجاورة للعنصر 1 في $\{1,3\}$ والعنصر مجاورة للعنصر 2 في $\{1,2\}$
 وأن $g_1(\{1,3\} \times \{1,2\}) = \{2,3\} \not\subseteq \{1,3\}$
 أي أن g_1 غير مستمر في النقطة (١,2) (٥)
 2- أن $g_2(2) = -2$ وأن $\{1,-2\}$ مجاورة للعنصر -2 و
 $\{1,2\}$ مجاورة للعنصر 2 وأن $g_2(\{1,2\}) = \{-1,-2\} \not\subseteq \{1,-2\}$
 أي أن g_2 غير مستمر في النقطة 2 (٥)

د. عمار سليم
28

120

اسم الطالب:
الدرجة: مائة
العلامة: 100

امتحان مقرر بنى جبرية (4)
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - شعبة الجبر
الفصل الثاني للعام الدراسي 2012/ 2013

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (15 علامة) لنكن S نصف زمرة و B مجموعة القواسم البينية واليسارية لكل عنصر من S ، فثبت أن B تكون غير خالية إذا وفقط إذا كانت S مونويد (نصف زمرة واحدة).

السؤال الثاني: (15 علامة) لنكن S نصف زمرة و A مجموعة جزئية غير خالية من S ، أثبت أن $B = \{A\}$ إذا وفقط إذا كانت B هي تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A .

السؤال الثالث: (10 علامات) لنكن S نصف زمرة و $a \in S$ وإذا كان p_a هو التحويل البياني الداخلي، فثبت أن المجموعة $\{p_a; a \in S\}$ هي نصف زمرة جزئية من نصف زمرة التحويلات الثلمة $F(S)$ لنصف الزمرة S .

السؤال الرابع: (20 علامة) ليكن e عنصراً جامعاً من نصف زمرة S ولتكن H_e مجموعة جزئية من eSe تحوي كل عنصر من eSe يملك نظيراً من eSe بالنسبة إلى e ، فثبت أن:

(1) H_e زمرة جزئية من S تحوي e .

(2) H_e تحوي أي زمرة جزئية G من S تتقاطع مع H_e أي أن $G \cap H_e \neq \emptyset \Rightarrow G \subseteq H_e$.

السؤال الخامس: (15 علامة) بفرض أن $\{u\}$ جملة أساسية من المجاورات المفتوحة للعنصر المحايد e في الزمرة النصف طوبولوجية G ، أثبت أن $\{x u\}$ تشكل قاعدة للطوبولوجيا على G .

السؤال السادس: (15 علامة) أثبت أن كل زمرة طوبولوجية تملك جملة أساسية تناظرية $\{u\}$ لمجاورات العنصر المحايد e .

السؤال السابع: (10 علامات) لنكن \mathbb{R}^+ مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر ولزودها بعملية الضرب العادية تصبح (\mathbb{R}^+, \cdot) زمرة، ولنعرف طوبولوجيا τ على \mathbb{R}^+ بالشكل التالي: $U \in \tau \Rightarrow A \subseteq U$ حيث $A = \{2\}$ (أي أن المجموعات المفتوحة هي المجموعات الحاوية على العدد 2) والمطلوب:

(1) هل \mathcal{G}_1 مستمر؟ ولماذا؟

(2) هل \mathcal{G}_2 مستمر؟ ولماذا؟

(3) استنتج فيما إذا كان \mathbb{R}^+ زمرة طوبولوجية أم لا.

د. عصام نسيم

حُصص في 2013/ 6/ 27

سليم قاصح - ربيعية (4)
 لطلبة السنة الرابعة رياضيات (هـ)
 الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٢/٢٠١٣

السؤال الأول: [15]

ان المجموعة $B = \{ b \in S ; bS = Sb = S \}$

لنعم الشرط: $B \neq \emptyset$ فهو غير خاير $b \in S$ ينتمي الى B وبالتالي

$\forall a \in S$ فإنه يوجد $x, y \in S$ بحيث $yx = a, yb = a$ (5)
 لكن $b \in S$ وبالتالي يوجد $e \in S$ و $e' \in S$ بحيث $eb = b, e'b = b$
 ومنه نجد:

$ae = ybe = yb = a \Rightarrow e$ هي اوية يميني
 $e'a = e'bx = bx = a \Rightarrow e'$ هي اوية يساري
 $\Rightarrow e = e'$ (5)
 هي اوية في S

وبالتالي e هو توحيد
 كفاية الشرط: اذا كانت e هو توحيد فبما e ينتمي الى B فان

$S = eS = Se = S$ وبالتالي $B \neq \emptyset$ (5)

السؤال الثاني: [15]

١- لتعرف A و B هي تقاطع كل اقسام الزمر الجزئية من S الحاوية على AG
 ان $A \subseteq B$ و B هي نصف زمرة $\Leftrightarrow B$ تحتوي كل الجاءات الممكنة (8)

لغنا من A ان $\langle A \rangle \subseteq B$

من ناحية اخرى $A \subseteq \langle A \rangle$ (نصف زمرة تحتوي A) وبالتالي حسب تعريف B

فان $B \subseteq \langle A \rangle$ ومنه نستنتج $B = \langle A \rangle$ (7)

- لتكن $B = \langle A \rangle$ با ان كل نصف زمرة جزئية من S تحتوي A فهي تحتوي $\langle A \rangle$
 اي ان تحتوي B وبالتالي B هي اصغر نصف زمرة جزئية تحتوي A
 وبالتالي فهي تحاطة بنصف زمرة جزئية من S هي A

القيمة (٢)

~~22~~
$$\int_a \int_b (x) = \int_a (\int_b (x)) = \int_a (xb) = (xb)a = x(ba) = \int_{ba} (x)$$

السؤال الرابع: 20

$$\forall a, b \in eSe \Rightarrow \begin{cases} ae = ea = a \\ be = eb = b \end{cases} \Rightarrow abe = ab = eab \Rightarrow ab \in eSe$$

$\forall a \in eSe \Rightarrow ae = ea = a \Rightarrow eSe$ (5)
 إذا كان $x, y \in eSe$ فإن $xy = yx = e$ (6)
 كذلك فإن $e \in H_e$ ، إضافة إلى ذلك إذا كان $u, v \in H_e$ فإن $uv = vu = e$ (7)
 حيث يكون $u, v \in H_e$ (8)

(2) بفرض ان G زمرة جزئية من S بحيث أن $G \cap H \neq \emptyset$ وبفرض ان H

$$e = ha = haf = ef = eag = ag = f$$

ادنیٰ e ہو مبادی میں G والے $e \leq e \leq G$ و حسب تعریف H_e ہوں

5 $G \subseteq H_e$

15

ليكن e عنصر افتراضي في G و W مجاورة مفتوحة ما لـ e
 $\lambda_e^{-1}: x \rightarrow \tilde{x}$ هوميومورفيزم (5) (بمبرهنة سابقة) فإن: (5)
 $\lambda_e^{-1}(W) = \tilde{W}$ تكون مجموعة مفتوحة مجاورة للعنصر e أي أن W مجاورة (5)
 ومنه يوجد $u \in \tilde{W}$ بحيث يكون $u \subseteq \tilde{W}$ (لأن u جلة أساسية
 لبادرات e) ومنه يتبع $u \subseteq W$ أي أن $\{xu\}$ قائمة
 للتوليد في G . (5)

السؤال السادس: 15

لكن $\{v\}$ جلة أساسية من الجادرات المفتوحة للعنصر e ، وبما أن $e = e$
 فإن g هوميومورفيزم يكون من أجل أي v من $\{v\}$ فإن v^{-1} مجاورة
 مفتوحة لـ e ، فإذا أخذنا $u = v \cdot v^{-1}$ فإن u تكون مجاورة متناظرة (8)
 لـ e وذلك لأن $u^{-1} = v \cdot v^{-1} = u$ ، وبما أن كل v تحتوي u يتبع
 أن كل مجاورة لـ e تحتوي مجاورة v و v تحتوي u يتبع أن $\{u\}$ جلة
 أساسية للجادرات e وهي تناظرية (7)

السؤال السابع: 10

(1) التطبيق g_1 غير متبني في النقطة (2) وذلك لأن:
 $g_1(1,2) = 2$ ، أن $\{2\}$ مجاورة للنقطة (2) وأن $\{1,2\}$ مجاورة
 للنقطة (1) في $\{1,2\}$ دأصف مجاورة للنقطة (2) في $\{2\}$
 كما أن $\{2\}$ و $\{1,2\}$ غير متبني في R^* (5)
 $g_2(3) = \frac{1}{3}$ لأن g_2 غير متبني في النقطة (3)
 أن $\{2, \frac{1}{2}\}$ مجاورة للنقطة $\frac{1}{3}$ وأن $\{1,2\}$ مجاورة للنقطة (3) في
 $\{2,3\}$ كما أن $\{2, \frac{1}{2}\} \neq \{2, \frac{1}{3}\}$ في R^* (4)
 نستنتج أن R^* ليست زمرة طوبولوجية (3)